Mathématiques

SÉRIE ES - SPÉCIALITÉ MATH

bac blanc

FÉVRIER 2008

Durée de l'épreuve : 3 heures – Coefficient : 7

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 2 à 4

Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction dans l'évaluation de la copie.

Les **calculatrices** sont **AUTORISÉES** pour cette épreuve.

Le devoir comporte **4** exercices indépendants.

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les élèves

Madame Boulard fait un très grand élevage de chats de races. Elle possède des Siamois, des Birmans et des Abyssins. Le printemps dernier, pratiquement toutes ses femelles ont eu des bébés et Madame Boulard a mis une annonce pour signaler qu'elle avait une très grande quantité de petits chatons à vendre.

On sait que :
- 32 % des chatons sont des Siamois,
- 54 % des chatons sont des Abyssins,
- et le reste est constitué de Birmans.

De plus :
- parmi les Siamois, 54 % sont des mâles,
- 66 % des Abyssins sont des femelles,
- il y a au total 40,96 % de chatons mâles.

Un petit garçon, Pierre, vient acheter un chaton avec sa mère. Comme ils sont tous adorables et qu'il n'arrive pas à choisir, Pierre décide de le choisir au hasard et de le mettre dans une boîte. On désigne par S, B, A, M et F les événements suivants :
- S : « le chat acheté par Pierre est un chaton Siamois »,
- B : « le chat acheté par Pierre est un chaton Birman »,
- A : « le chat acheté par Pierre est un chaton Abyssin »,
- M : « le chat acheté par Pierre est un chaton mâle »,
- F : « le chat acheté par Pierre est un chaton femelle ».

1/ **a/** Traduire les données de l'énoncé en langage de probabilités en citant à chaque fois la phrase ou proposition traduite.

b/ Construire un arbre illustrant la situation, en indiquant sur chaque branche les probabilités données dans l'énoncé. Les probabilités manquantes seront calculées dans les questions ultérieures.

2/ **a/** Calculer $p(\text{M} \cap \text{A})$ et interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

b/ Déterminer la probabilité que Pierre ait acheté un chaton mâle Siamois,

c/ En déduire que la probabilité que Pierre ait acheté un chaton mâle Birman est égale à 0,053 2.

d/ Ouvrant la boîte, sa mère découvre que le chaton acheté par Pierre est un Birman. Quelle est la probabilité que ce soit un mâle ?

EXERCICE 2 **4 points**

Commun à tous les élèves

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 2000, elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en k€ : y_i	64	75	100	113	125	127

1/ **a/** Construire le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ y_i\right)$ dans un repère orthogonal.
Les unités graphiques seront : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

b/ Donner les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir au dixième). Placer le point G dans le repère.

2/ En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.

a/ Donner une équation de la droite d'ajustement (D) obtenue à la calculatrice par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).

b/ Tracer cette droite (D) dans le repère.

c/ Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2007 avec cette approximation ?

3/ En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement exprimé par

$$y = f(x) \text{ avec } f(x) = -2x^2 + 23x + 63$$

Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2007 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?

4/ En réalité, le bénéfice en 2007 est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2006.
Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2007 ?

EXERCICE 3 **6 points**

Commun à tous les élèves

Une entreprise produit et vend un modèle de pièces pour hélicoptères. Pour des raisons techniques et de stockage, sa production mensuelle est comprise entre 100 et 600 pièces. Elle vend tout ce qui est produit.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1 ; 6]$ par

$$f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8\ln(x).$$

$f(x)$ représente le bénéfice mensuel, exprimé en dizaines de milliers d'euros, obtenu pour la vente de x centaines de pièces.
La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[1 ; 6]$. On note f' sa fonction dérivée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1/ **a/** Montrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[1 ; 6]$,

$$f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$$

b/ Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

c/ En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

d/ Quelle est la quantité de pièces à produire pour obtenir un bénéfice mensuel maximal ? Calculer ce bénéfice arrondi à l'euro près.

2/ **a/** Prouver que la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x\ln(x) - x$$

est une primitive de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b/ En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$.

c/ Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 6]$ (donner la valeur décimale arrondie au dixième).

Rappel :

Soit f une fonction et $[a ; b]$ un intervalle sur lequel f est définie et dérivable.
La valeur moyenne m de f sur un l'intervalle $[a ; b]$, est le nombre m tel que :

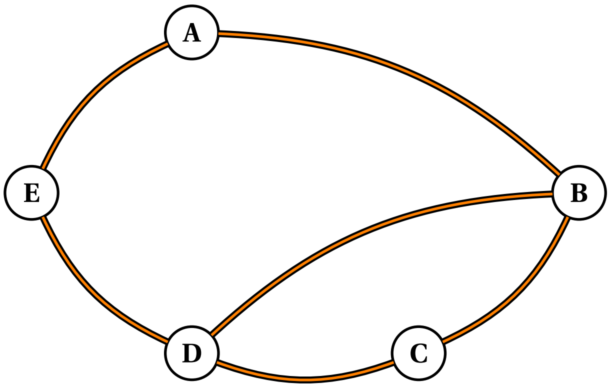
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

EXERCICE 4 **5 points**

Élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

1/ Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.

On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :



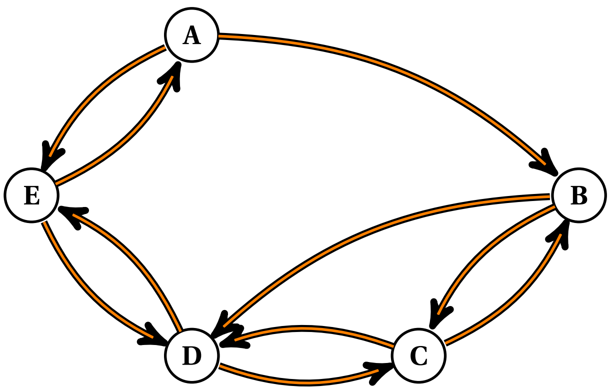
a/ On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.

Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier.

Déterminer ce nombre.

b/ Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?

2/ Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B. Le graphe G′ ci-dessous modélise cette nouvelle situation :



a/ Donner la matrice M associée au graphe G′. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).

b/ On donne $M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ?

Les donner tous.

c/ Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A.

Quel est ce cycle ?

En est-il de même pour le sommet B ?